

تحلیل آنالیز پایداری جابجایی سیال ویسکوز قابل امتزاج در محیط متخلخل

محمد رضا شاه نظری^{۱*} و حسین شکوهمند^۲

^۱استادیار دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی خواجه نصیر

^۲استاد دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۸/۴/۳، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۹/۸/۵، تاریخ تصویب ۹۰/۸/۲۵)

چکیده

بررسی و تحقیق در آنالیز پایداری جابجایی سیال قابل امتزاج در محیط متخلخل به دلیل کاربرد آن در بازیابی جریان های نفتی و اختلاط آب شیرین و شور در بررسی سفره های آب زیر زمینی یکی از مسائل کلاسیک به شمار می رود، در این مقاله علاوه بر ارایه یک حل تحلیلی بر اساس نتایج تن و هومسی [۳] برای آنالیز پایداری در زمان $t=0$ (پروفیل پله ای غلظت)، یک روش جدید عددی مبتنی بر روش وزن دادن به باقی مانده ها (رویه تلفیق)، جهت حل فضای فوریه معادلات، ارایه شده است. نتایج به صورت منحنی های مقادیر نرخ رشد اغتشاش (σ) بر حسب عدد موج (k) برای مقادیر مختلف نسبت تحرک در زمان های مختلف ارایه و با نتایج سایر محققین مقایسه شده است.

واژه های کلیدی: آنالیز پایداری، جابجایی، سیال، قابل امتزاج، محیط متخلخل

مقدمه

بررسی تاثیرات عوامل مختلف در این پدیده مد نظر بوده است. هرچند اغلب این بررسی ها به لحاظ پیچیدگی مدل سازی عددی کار، متمرکز بر آزمایش های تجربی بوده است [۳].

فرایندهای جابجایی در محیط های متخلخل در بازیابی بهینه نفت، کانالیزه شدن در ستونهای اکنه^۴ و بسترهای ثابت^۵ و... مورد توجه ویژه قرار دارند. به طور کلی اگر سیال جانشین دارای ویسکوزیته کمتری نسبت به سیال جایگزین شده باشد، این تفاوت ویسکوزیته منجر به ناپایداری هیدرودینامیکی شده و باعث ایجاد کانالی از سیال جانشین در منطقه سیال جایگزین شده می گردد [۴]. اولین تحلیل ریاضی پایداری خطی توسط چوکه و همکاران [۵] برای جابجایی دو سیال غیر قابل امتزاج انجام شد. با در نظر گرفتن تنش سطحی در مرز مشترک آنها دریافتند که یک طول موج بریدگی بسیار خطرناک برای ناپایداری وجود دارد. با بسط تئوری آنها برای سیالات قابل امتزاج بدون وجود تنش سطحی و پراکندگی^۶، نتایج به دست آمده حاکی از رشد بدون مرز ثابت رشد با عدد موج بود. این موضوع از نظر فیزیکی غیر واقعی است و مکانیزم های فیزیکی ای وجود دارند که موج های کوتاه را تعدیل می نمایند.

پیرین این نکته را تصریح نمود که برای سیالات قابل امتزاج باید تاثیر نفوذ را مد نظر قرار داد اما حل او برای

ناپایداری جریان سیالات یکی از مباحث عمده و کلاسیک مکانیک سیالات به شمار می رود. گذر از جریان لامینار به توربلانس و ناپایداری سطح آزاد در سیال از مشهورترین مسائل مطروحه در این زمینه طی سالیان متمادی بوده است. بررسی ناپایداری جابجایی دو سیال به صورت قابل امتزاج^۱ و یا غیر قابل امتزاج^۲ به ویژه در محیط های متخلخل، از آنجا که دارای مصداق های متعددی در صنایع می باشند، از دهه ۵۰ میلادی به عنوان یک موضوع اساسی در زمینه ناپایداری مورد استقبال بسیاری از محققین قرار گرفته است. نخستین بار هیل (۱۹۵۲) نسبت به مدل سازی موضوع اقدام نمود [۱].

وقتی یک سیال با ویسکوزیته کم تر جایگزین سیال با ویسکوزیته بیشتر می شود غالباً فصل مشترک دو سیال دچار اغتشاش خواهد شد. تولید زبانه ناشی از گسترش اغتشاش معمولاً به نام پدیده فینگرینگ^۳ شناخته می شود [۲].

مهم ترین کاربرد این پدیده در بازیابی بهینه نفت می باشد. در بیشتر کاربردها ناپایداری ویسکوز پدیده نامطلوبی است زیرا باعث کاهش راندمان جابجایی می گردد. هر فرایندی که در جهت حذف ناپایداری ها یا کنترل نرخ رشد زبانه های ویسکوز پیش رود، به لحاظ فنی دارای اهمیت می باشد. از مدل سازی اولیه توسط هیل و سافمن - تیلور تا کارهای هومسی در سال های اخیر،

شامل گسترش^۸، شکافتگی رأس^۹، حفاظت^{۱۰} و جفت شدگی^{۱۱} آزمایش‌های متعددی انجام دادند. بر اساس این نتایج که با توجه به فرضیات، تنها برای سلول هل-شاو معتبر خواهند بود، جفت شدن در اطراف زبانه‌های مجاور قابل وقوع می‌باشد. همچنین به دلیل گسترش یک زبانه ممکن است از رشد زبانه‌های دیگر جلوگیری شود که چنین پدیده‌ای را حفاظت می‌نامند. این نتایج همچنین حساسیت و پیچیدگی بالای فینگرینگ دو بعدی را نشان می‌دهد.

روش متعارف برای مدل‌سازی عددی جابجایی قابل امتزاج در محیط متخلخل، با یا بدون تأثیر پراکنش، بر اساس حل معادلات حاکم (جریان و غلظت) روش اختلاف محدود می‌باشد.

راجرسون و میبرگ [۱۱] به بررسی مشابهت جریان جابجایی عمودی و افقی در فینگرینگ ویسکوز پرداختند. همچنین مانیکام و هومسی [۱۲] ضمن بررسی جابجایی قابل امتزاج افقی، دریافتند که غیر یکنواختی رابطه ویسکوزیته-غلظت در محدود کردن رشد غیر خطی زبانه‌های ویسکوز مؤثر است. ریاض و همکاران [۱۳] یک تحلیل عددی-تجربی برای فینگرینگ ویسکوز در یک سلول هل-شاو به صورت جریان شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین بریلوفسکی و همکاران [۱۴] با معرفی سیستم مختصات منحنی‌الخط، یک حل تحلیلی مجانبی برای جابجایی قابل امتزاج و بررسی رشد زبانه‌ها به دست آوردند. هرچند در این تحقیق برای اولین بار جهت تحلیل مسئله فینگرینگ یک فرمولاسیون مبنی بر سیستم کلی مختصات منحنی‌الخط ارائه شده است ولی فرضیات صورت گرفته در پژوهش‌های قبلی همچنان باقی است.

دویت [۱۵] بررسی تأثیر یک واکنش سطحی در فصل مشترک دو سیال را بر فینگرینگ ویسکوز مورد بررسی قرار داد. در این تحلیل واکنش به صورت یک واکنش درجه سوم مد نظر قرار گرفته است. حل پایه در شرایط خاص عدد دامکوهلر (Da) بالا مد نظر قرار گرفته و بر این اساس آنالیز پایداری خطی صورت گرفته است. در مقاله دیگر توسط همین محقق [۱۶] معادله حاکم شامل ترم غیر خطی در فضای حقیقی با استفاده از روش آدامز-بشفورت مورد تحلیل قرار گرفته است، در حالی که معادله در فضای فوریه به صورت خطی تحلیل شده است.

معادلات پایداری خطی با خطا همراه است. وارد کردن نفوذ باعث وابستگی پروفیل حالت پایه به زمان و در نتیجه ایجاد خطا و پیچیدگی در ادبیات موضوع می‌گردد [۶].

هلر نیز پایداری جابجایی‌های قابل امتزاج به همراه نفوذ را مورد مطالعه قرار داد. با این حال او فرضیات مشکوکی در مورد نوع اغتشاشات انجام داد که منجر به ایجاد یک معادله مقدار ویژه غیر همگن مرتبه دوم گردید [۷].

با توجه به این که در سیستمی که توسط تئوری پایداری خطی توصیف می‌شود هیچ‌گونه ناهمگنی نباید بروز کند بنابراین روش هلر با خطا مواجه است. اسخووالتر [۸] هر دو نوع فینگرینگ ناشی از دانسیته و ویسکوزیته را مورد بررسی قرار داد و از یک ناحیه نفوذی^۷ با ضخامت ثابت برای محاسبه نفوذ استفاده کرد. وی به منظور رسیدن به یک حالت پایه فرض نمود که شار جرمی در همه جا ثابت است. این فرض باعث محدود شدن مساله به چند پروفیل غلظت خاص شده و نمی‌تواند در حالت واقعی که در آن حالت پایه با زمان تغییر می‌کند مورد استفاده قرار گیرد.

وودینگ از جمله معدود افرادی بود که پایداری یک حالت پایه وابسته به زمان را مورد بررسی قرار داد [۹]. او مساله را به صورت یک مساله مقدار اولیه در نظر گرفت و حل اغتشاشات را به چند جمله‌ای‌های هرمیت بسط داد. تمرکز اصلی او روی ناپایداری ناشی از گرانش بود بنابراین از تقریب بوزینسک استفاده کرد و دریافت که اگرچه اغتشاشات کوچک باید در نهایت در $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل کنند ولی اغتشاشات در یک محدوده طول موجی می‌توانند در آغاز رشد کنند به طوری که امکان تجاوز آنها از محدوده‌ای که در آن تئوری خطی صادق است وجود دارد.

تان و هومسی [۳] در سال ۱۹۸۶ با در نظر گرفتن یک آنالیز پایداری خطی برای سیستم با تغییرات ویسکوزیته به فرم نمایی و بدون تغییرات دانسیته و همچنین پراکنش ایزوتروپیک ($D_{\parallel} = D_{\perp}$) انجام دادند. نتایج نشان داد که در زمان‌های به حد کافی طولانی، پراکنش موجب ایجاد شیف‌ت در طول موج‌های بزرگتر شده و در جهت پایدار شدن جریان خواهد بود.

زیمرمن و هومسی [۱۰] در سال ۱۹۹۱ با فرض ضریب پراکنش برابر با D_m به منظور بررسی وضعیت زبانه‌ها

چون سرعت حرکت سیال ثابت و برابر U فرض شده است، به منظور ثابت نگه داشتن اساس سطح مشترک معادلات در یک مرجع متحرک $x = x_1 - Ut$ به صورت زیر تبدیل می‌گردند. (به منظور سادگی x_1 جهت جریان در مختصات ثابت و x جهت جریان در مختصات متحرک منظور شده است.)

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (۶)$$

$$P_x = -\mu u - \mu U \quad (۷)$$

$$P_y = -\mu v \quad (۸)$$

$$P_z = -\mu w \quad (۹)$$

با توجه به عدم وجود هیچ مشخصه طولی و زمانی در مسئله، با معرفی مقیاس طولی و زمانی مناسب برابر با $\frac{D}{U}$ و $\frac{D}{U^2}$ و همچنین معرفی $\mu_1 D$ به عنوان مقیاس فشاری مناسب معادلات (۶) تا (۱۰) را می‌توان به صورت معادلات بدون بعد نمایش داد در این صورت تنها ترم ظاهری معادله داری در جهت x (معادله ۷) و معادله نفوذ (معادله ۱۰) تغییر خواهد کرد: [۳]

$$P_x = -\mu u - \mu \quad (۱۰)$$

$$c_t + uc_x + vc_y + wc_z = \nabla^2 c \quad (۱۱)$$

معادلات در فرم بدون بعد، دارای یک پاسخ پایه به شکل زیر خواهد بود:

$$u = v = w = 0 \quad (۱۲)$$

$$\mu_0 = \mu_0(c_0) = \mu_0(x, t) \quad (۱۳)$$

$$c_0(x, t) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right] \quad (۱۴)$$

$$P_0(x, t) = -\int \mu_0(s, t) ds \quad (۱۵)$$

تحلیل پایداری

بررسی و تحلیل خطی پایداری مسئله فوق از طریق انتقال معادلات به فضای فوریه قابل انجام خواهد بود، معرفی متغیرهای اغتشاش به فرم زیر می‌توان معادلات را در فرم فوریه بازنویسی نمود [۳].

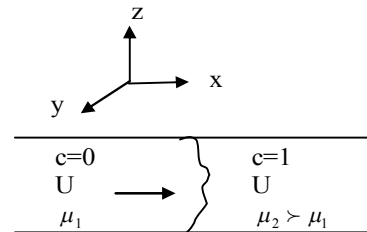
$$(u', c') = (\delta_u, \delta_c) \exp(\sigma t) \exp[i(k_y y + k_z z)] \quad (۱۶)$$

با کاربرد یک تقریب شبه پایا (quasi-steady state) که بر اساس فرض سرعت نسبی به مراتب بزرگتر نرخ تغییرات اغتشاش در مقایسه نرخ تغییرات حالت پایه می‌باشد، [۵]

در این مقاله پایداری خطی فرایندهای جابجایی قابل امتزاج مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا به مدل‌سازی مساله پرداخته می‌شود و در ادامه مدل برای زمان صفر استفاده از روش تحلیلی و برای سایر زمان‌ها به وسیله یک روش نیمه تحلیلی جدید حل شده و نتایج حاصل از آن ارائه گردیده است.

تئوری

شکل (۱) سیستم مورد بررسی را نشان می‌دهد. جریان یکنواخت سیال با سرعت U در راستای x مد نظر قرار گرفته است. جریان به صورت غیر قابل تراکم و محیط به صورت همگن با میزان تخلخل و پراکندگی ثابت و به صورت ایزنتروپیک در نظر گرفته شده است [۲].



شکل ۱: سیستم مورد بررسی.

معادلات حاکم را در این صورت می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (۱)$$

$$\nabla \cdot P = -\mu V \quad (۲)$$

$$\frac{Dc}{Dt} = D\nabla^2 c \quad (۳)$$

در معادلات فوق، c غلظت حلال است که می‌توان آنرا در جریان بالا دست (بدون از دست دادن هیچ کلیتی) برابر واحد در نظر گرفت. در اینجا μ ویسکوزیته سیال بر میزان نفوذپذیری محیط در نظر گرفته شده است. که برای سادگی به آن ویسکوزیته اطلاق می‌گردد. معادلات ۱ تا ۳ به ترتیب معادلات پیوستگی، داری و معادله نفوذ هستند. رابطه بین ویسکوزیته و غلظت بصورت نمایی در نظر گرفته شده است. [۳]

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dc} = R \quad (۴)$$

که پارامتر وابسته به نسبت تحرک $(\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1})$ است.

$$\alpha = \exp(R) \quad (۵)$$

که در آن $l^2 = \sigma + k^2$ و از سوی دیگر با توجه به خاصیت تابع دلتا به عنوان شرایط تطبیقی می توان نوشت:

$$\delta_u(0^+) = \delta_u(0^-) \quad (۲۲-الف)$$

$$\alpha \frac{d\delta_u}{dx}(0^+) = \frac{d\delta_u}{dx}(0^-) \quad (۲۲-ب)$$

$$\delta_c(0^+) = \delta_c(0^-) \quad (۲۲-ج)$$

همچنین با انتگراسیون معادله (۱۹) از 0^- تا 0^+ معادله زیر حاصل می شود:

$$\int_{0^-}^{0^+} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + k\delta(x) \frac{d}{dx} - k^2 \right) \delta_u dx = Rk^2 \int_0^{0^+} \delta(x) \delta_u dx \quad (۲۳)$$

معادلات (۲۲-الف تا ۲۲-ج) و (۲۳) به ترتیب شرط لازم جهت پیوستگی، ترم اغتشاش سرعت، فشار و غلظت هستند. با توجه به اینکه رابطه (۲۱-الف و ۲۱-ب) به طور دقیق در معادله (۲۰) صادق هستند. جهت تحلیل معادله مشخصه، معادلات (۲۲) و (۲۳) را می توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد.

$$AX = 0 \quad (۲۳)$$

که در آن $X = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ معرف بردار ضرایب مجهول

پروفیل سرعت اغتشاش (معادله ۲۱) برای $x < 0$ و $x > 0$ می باشد.

ماتریس ضرایب A با استفاده از معادلات (۲۲) و (۲۳) برابر است با:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & k & \alpha l & \alpha k \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

که در آن $F_1 = k^2 l - R(k^2 + l^3)$ ، $F_2 = kl^2 - Rk^2 - Rkl^3$ و $F_3 = k^2 l$ و $F_4 = kl^2$ ضرایب حاصل از انتگراسیون معادله (۲۳) می باشد. با برابر صفر قرار دادن دترمینان A ، معادله مشخصه حاصل برابر است با:

$$2lk + 2k^2 - Rk = 0 \quad (۲۵)$$

معادلات فضای فوریه برای هر زمان t ، را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu_0}{dx}(x, t_0) \frac{d}{dx} - k^2 \right) \delta_u = \left(\frac{k^2}{\mu_0(x, t_0)} \right) \left(\frac{d\mu}{dc} \right) \delta_c \quad (۱۷)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma - k^2 \right) \delta_c = - \frac{dc_0}{dx}(x, t_0) \delta_u \quad (۱۸)$$

با توجه به رابطه (۴) برای بیان ارتباط غلظت و ویسکوزیته و تلفیق معادلات (۱۷) و (۱۸) می توان معادله فضای فوریه بر حسب پارامتر اغتشاش سرعت را بدین شکل نوشت: [۳]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma(t_0) - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} + R \frac{dc_0}{dx}(x, t_0) \frac{d}{dx} - k^2 \right) \delta_u = Rk^2 \frac{dc_0}{dx}(x, t_0) \delta_u \quad (۱۹)$$

معادله (۱۹) مسئله مقدار ویژه با شرایط مرزی انهدام اغتشاش در فواصل دور از فصل مشترک ($x \rightarrow \mp\infty$) می باشد. برای $t=0$ با توجه به امکان بیان c_0 به صورت یک تابع پله ای و در نتیجه $\frac{dc_0}{dx}(x, t_0) = \delta(x)$ ، معادله (۱۹) را می توان ساده نمود و به صورت تحلیلی حل کرد. [۳] برای $t > 0$ در این مقاله علاوه بر حل تحلیلی در $t=0$ ، یک روش نیمه تحلیلی جدید در حالت کلی ارائه شده است.

بررسی ناپایداری در زمان $t=0$

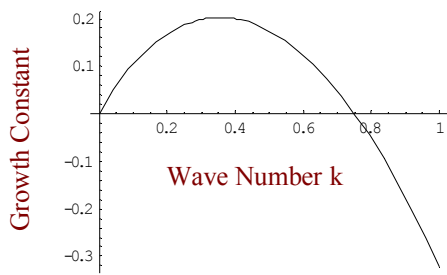
بررسی ناپایداری برای پروفیل غلظت پله ای اولین بار توسط چوکه [۵] مورد بحث قرار گرفت. در این مقاله، تحلیل زمان $t=0$ مشابه روش ارائه شده توسط تن و هومسی [۳] می باشد. معادله (۱۹) برای پروفیل غلظت پله ای به صورت زیر ساده می گردد:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) \delta_u = 0 \quad (۲۰)$$

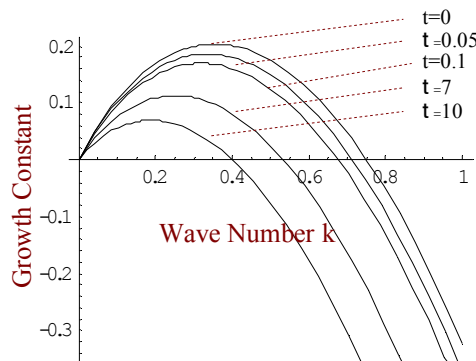
پاسخ معادله (۲۰) با توجه به شرط مرزی $\delta_u = 0$ برای $(x \rightarrow \mp\infty)$ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\delta_u = A_1 \exp(lx) + B_1 \exp(kx), \quad x < 0 \quad (۲۱-الف)$$

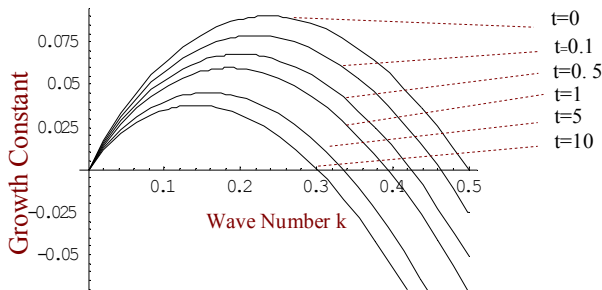
$$\delta_u = A_1 \exp(-lx) + B_1 \exp(-kx), \quad x > 0 \quad (۲۱-ب)$$



شکل ۲: ثابت رشد اغتشاشی موج بر حسب عدد موج برای $R=3$ در زمان‌های مختلف.



شکل ۳: ثابت رشد اغتشاشی موج بر حسب عدد موج برای $R=3$ در زمان‌های مختلف.



شکل ۴: ثابت رشد اغتشاشی موج بر حسب عدد موج برای $R=2$ در زمان‌های مختلف.

ارایه نتایج

نرخ رشد اغتشاش به صورت ارتباط مشخصه (σ) بر حسب عدد موج (k) در شکل (۲) ارایه شده است. مقادیر برای $R=3$ و $\alpha=20.09$ در زمان صفر ارایه شده‌اند، چنانچه از شکل مشخص است برای اعداد موج بزرگتر از تقریباً 0.75، شرایط پایداری برقرار خواهد بود، همچنین بحرانی‌ترین شرایط در $k=0.345$ اتفاق می‌افتد که نرخ رشد در این نقطه تقریباً برابر 0.202 می‌باشد. مقادیر نرخ

و یا $l = \frac{-k \mp \sqrt{k^2 + 2Rk}}{2}$ در نتیجه:

$$\sigma = \frac{1}{2}[(Rk - k^2) - k\sqrt{k^2 + 2Rk}] \quad (26)$$

بر این اساس ناپایدارترین مورد متناسب است با:

$$\sigma_m = \left[\frac{(-2 + \sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})}{3 - \sqrt{5}} \right] \frac{R^2}{4} \quad (27)$$

$$@k_m = \frac{(2\sqrt{5} - 4)R}{4} = 0.118R$$

این رابطه همراه با مقیاس اساسی نفوذ، بیانگر مقیاس طول و زمان مشخصه برای فینگرینگ ناشی از ویسکوزیته است. همچنین می‌تواند به عنوان مبنایی مناسب برای کنترل نتایج حاصل از روش عددی برای زمان‌های $t > 0$ قرار گیرد.

بررسی شبه پایا در زمان $t > 0$

برای زمان $t > 0$ پروفیل غلظت در هر زمان ثابت، تابعیت از مکان خواهد داشت، با توجه به حل پایه پاسخ تحلیلی ساده ای برای معادله (۱۹) نمی‌توان بدست آورد [۴].

در این تحقیق روش WRM (روش تلفیق)، برای حل عددی معادله (۱۹) با توجه به پاسخ تحلیلی حاصل برای زمان صفر به صورت زیر مد نظر قرار گرفته است:

$$\delta_u = \sum a_j^+ \exp(+jlx) + \sum b_j^+ \exp(+jlx), \quad x < 0$$

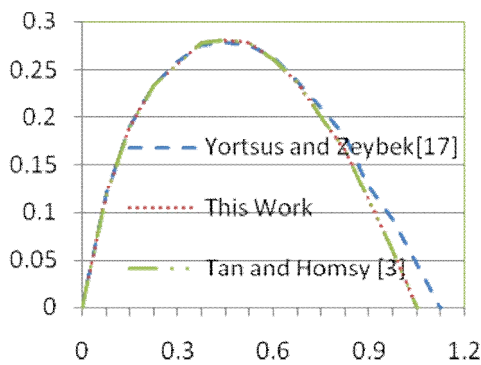
$$\delta_u = \sum a_j^- \exp(-jlx) + \sum b_j^- \exp(-jlx), \quad x > 0 \quad (28)$$

ز آنجا که پروفیل معرفی شده در شرایط مرزی $\delta_u = 0$ برای $x \rightarrow \mp\infty$ صادق است. به منظور تعیین ضرایب مجهول a_j و b_j علاوه بر شرط صدق پروفیل در معادله (۱۹) به ازای نقاط منتخب در هر دو محدوده $x \in [0, \infty[$ و $x \in]-\infty, 0]$ ؛ شرایط تطبیق به منظور حفظ پیوستگی مقادیر اغتشاش سرعت، فشار و غلظت به عنوان معادلات تکمیلی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین با انتگراسیون از معادله (۱۹) در ناحیه 0^- تا 0^+ ، معادله نهایی استخراج شده است. بدین ترتیب به منظور تعیین $N+4$ ضریب نامعین ($j=0$ to $N+1$) علاوه بر $2N$ نقطه منتخب، از چهار معادله تطبیق نیز استفاده شده است.

می‌گردد، به گونه‌ای که برای $R=4$ این محدوده تقریباً دو برابر محدوده $R=2$ می‌باشد. با توجه به رابطه تحلیلی زمان $t=0$ به نظر می‌رسد که ارتباط بین محدوده $R=2$ برای شرایط ناپایداری با R تقریباً به صورت خطی باقی خواهد ماند. در حالی که تابعیت بحرانی ترین نرخ مشخصه بر حسب R در هر زمان ثابت تقریباً به صورت مجذور R می‌باشد. شکل (۶) مقادیر بحرانی ترین نرخ مشخصه را بر حسب زمان و برای مقادیر مختلف R نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است مقدار - با زمان کاهش می‌یابد، در عین حال از این شیب کاهش بر حسب زمان با افزایش زمان کاسته می‌گردد.

همچنین با کاهش عدد موج نیز از این شیب کاهش بر حسب زمان کاسته می‌گردد، به گونه‌ای که تقریباً در مقادیر R کوچکتر از 0.2 و زمان‌های بزرگتر از 2 ؛ این شیب کاهش ناچیز خواهد بود.

شکل (۷) ثابت رشد اغتشاش را برای مقادیر مختلف k در $R=5$ و $t=0.5$ حاصل از مدل حاضر در مقایسه با نتایج یورتسوس و زیبک [۱۷] و تان و هومسی [۳] نشان می‌دهد. چنانچه مشخص است تطابق مناسبی بین نتایج این کار و نتایج [۱۷] و [۳] وجود دارد.



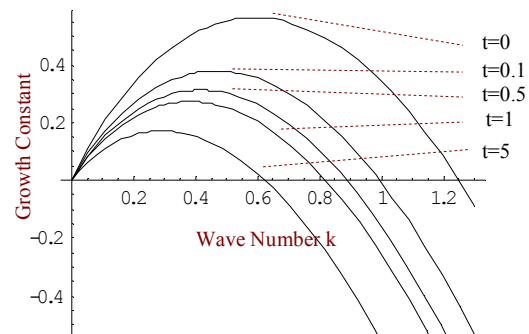
شکل ۷: ثابت رشد اغتشاش برای مقادیر مختلف k در $R=5$ و $t=0.5$ مدل حاضر در مقایسه با نتایج [۱۷] و [۳].

بحث و نتیجه گیری

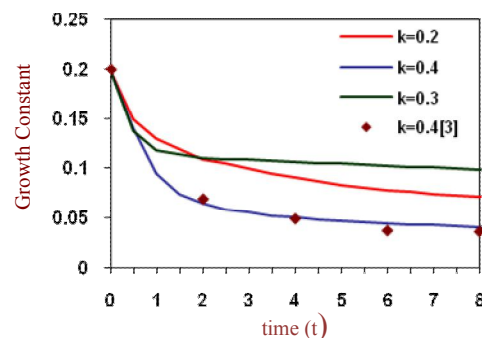
پایداری جابجایی سیال قابل امتزاج در یک محیط متخلخل مورد بررسی قرار گرفت. با ارایه یک مدل شبه پایا ضمن ارایه حل تحلیلی برای شرایط $t=0$ ؛ یک روش نیمه تحلیلی بر اساس استفاده از حل حدسی و روش WRM برای شرایط $t>0$ معرفی گردید. بررسی‌ها بیانگر پیش‌بینی یک محدوده عدد موج بود؛ که در آن محدوده

رشد اغتشاش برای زمان‌های $t \geq 0$ و برای $R=3$ در شکل (۳) ارایه شده است. از این شکل به وضوح مشخص است که برای هر زمان t ؛ در بخشی از اعداد موج σ مثبت است. به عبارت دیگر جابجایی خطی به ازای بخشی از نسبت تحرک نامطلوب؛ ناپایدار می‌گردد. از سوی دیگر بیشینه نرخ رشد در زمان صفر رخ می‌دهد و با افزایش زمان، بحرانی ترین مقدار σ کاهش می‌یابد، همچنین محدوده k که به ازای آن شرایط ناپایداری رخ خواهد داد، بر حسب پیش‌روی زمان، باریک‌تر می‌گردد.

شکل (۴) و (۵) ارتباط بین نرخ رشد مشخصه بر حسب عدد موج را برای زمان‌های مختلف، در دو حالت $R=2$ و $R=5$ نشان می‌دهد چنانچه مشخص است، رفتار ارتباط بین k و σ در تمام این حالات مشابه یکدیگر است.



شکل ۵: ثابت رشد اغتشاشی موج بر حسب عدد موج برای $R=5$ در زمان‌های مختلف.



شکل ۶: ثابت رشد اغتشاش بر حسب زمان برای مقادیر مختلف k در $R=3$.

از سوی دیگر با افزایش عدد R محدوده عدد موج که در آن شرایط ناپایداری حاکم خواهد بود، گسترده‌تر

متناسب با R و مقادیر بحرانی ترین مشخصه متناسب با R افزایش می‌یابد. مقایسه نتایج حاصل از به کارگیری روش معرفی شده تطابق خوبی با نتایج تن و هومسی را نشان می‌دهد و بیانگر کارا بودن روش معرفی شده می‌باشد.

شرایط ناپایداری ایجاد می‌گردد. این محدوده بر حسب پیشرفت زمان برای هر نسبت تحرک ثابت، کاهش می‌یابد، ضمن اینکه مقادیر بحرانی ترین مشخصه σ نیز کاهش می‌یابد.

در عین حال با افزایش نسبت تحرک برای هر زمان ثابت مقادیر محدوده عدد موج برای شرایط ناپایدار

مراجع

- 1 - Hill, S. (1952). Channelling In Packed Columns, *Chem. Eng. Sci.* Vol. 1, PP. 247–253.
- 2 - Sahimi, M. (1995). *Flow And Transport In Porous Media And Fractured Rock*, (VCH, Weinheim, Germany).
- 3 - Tan, C. T. and Homsy, G. M. (1986). "Stability of miscible displacements in porous media: rectilinear flow." *Phys. Fluids*, Vol. 29, PP. 3549–3556.
- 4 - Jerauld, G. R., Davis, H. J. and Scriven, L. E. (1984). "Stability of fronts of permanent form in immiscible displacement." *SPE 13164, Soc. Petr. Eng.*, Dallas, Tex.
- 5 - Chouke, R. L., Van Der Meurs, P. and Van Der Poel, C. (1959). "The stability of a slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacement in a permeable media." *Trans AIME*, Vol. 216, PP. 188–194.
- 6 - Perrine, R. L. (1963). *A Unified Theory For Stable And Unstable Miscible Displacement*, SPE 543.
- 7 - Heller, J. P. (1965). "Onset of instability patterns between miscible fluids in porous media." *J. Appl. Phys.*, Vol. 37, PP. 1566–1579.
- 8 - Schowalter, W. R. (1965). "Stability criteria for miscible misplacement of fluid from a porous medium." *Aiche J.*, Vol. 11, PP. 99.
- 9 - Wooding, R. A. (1962). "Free convection of fluid in a vertical tube filled with porous material." *Fluids Mech.*, Vol. 13, PP. 129–144.
- 10 - Zimmerman, W. B. and Homsy, G. M. (1991). "Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion." *Phys. Fluids A Fluid*, Vol. 3, PP. 1859–1872.
- 11 - Rogerson, A. and Meiburg, E. (1993a). "Shear stabilization of miscible displacement processes in porous media." *Phys. Fluids A Fluid*, Vol. 5, PP. 1344–1355.
- 12 - Manickam, O. and Homsy, G. M. (1994). "Simulation of viscous fingering in miscible displacements with non-monotonic viscosity profiles." *Phys. Fluids*, Vol. 6, PP. 95–107.
- 13 - Riaz, A., Pankiewitz, E. and Meiburg, E. (2004). "Linear stability of radial displacements in porous media: influence of velocity-induced dispersion and concentration-dependent diffusion." *Phys. Fluids*, Vol. 16, No.10, PP. 3592–3598.
- 14 - Brailovsky, I., Babchin, A., Frankel, M. and Sivashinsky, G. (2006). "Fingering instability in water-oil displacement." *Transport In Porous Media*, Vol. 63, PP. 363–380.
- 15 - De Wit, A. (2001). "Fingering of chemical fronts in porous media." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, 054502/1–4
- 16 - De Wit, A., De Kepper, P., Benyaich, K., Dewel, G. and Boreckmans, P. (2003). "Hydrodynamic instability of spatially extended bistable chemical systems." *Chem. Eng. Science*, Vol. 58, PP. 4823–4831.
- 17 - Yortsos, Y. C. and Zeybek, M. (1988). "Dispersion driven instability in miscible displacement in porous media." *Phys. Fluids*, Vol. 31, PP. 3511–3518.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Miscible
- 2 - Immiscible
- 3 - Fingering
- 4 - Packed Columns
- 5 - Fixed Bed regeneration
- 6 - Diffusion
- 7 - Intrapenetrated region
- 8 - Spreading
- 9 - Tip Splitting
- 10 - Shielding
- 11 - Pairing